

学马克思数学手稿 解微积分过程真义

——物质理论科学中几何整数微分是凝聚态的初始条件

陈 江*

摘要：马克思《数学手稿》一书在我国编译出版后，有两种不同的看法：一是认为马克思运用辩证法为微积分奠定了理论基础；另一相反的看法，认为马克思不懂微积分，其数学手稿没有什么学术价值。本文说明这两种看法正如毛泽东《矛盾论》指出：“在人类的认识史中，从来就有关于宇宙发展法则的两种见解，一种是形而上学的见解，一种是辩证法的见解，形成了互相对立的两种宇宙观。”这在物质理论科学（定量的物质几何学或纯数学）领域也不例外。事实上，辩证法宇宙观法则的数学演绎推导证明：几何整数微分是我们人类的宇宙过程的初始条件的形数结合几何学的形式表现；几何整数无穷积分是物质凝聚过程的形数结合几何学形式表现。

关键词：辩证法；形数结合几何学；物质；量子；几何整数微分

中图分类号：A12 **文献标识码：**A

物质理论科学，是源于客观实践的形与数相结合以**定量**探索和求解我们人类的宇宙**过程**来龙去脉的公理化的几何学演绎体系，又叫做定量的物质几何学或纯数学。恩格斯说：“数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。……纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。”^{[1]35}（“现实世界”又称“现实宇宙”）

如所周知，马克思主义哲学深刻揭示了客观世界运动的一般规律。辩证唯物主义是马克思主义哲学的重要组成部分，是马克思主义者的世界观（宇宙观）和方法论。世界（宇宙）统一于物质。世界物质统一性原理是辩证唯物主义最基本、最核心的观点，是马克思主义哲学的基石。遵循这一观点，最重要的就是坚持一切从客观实际出发，坚持实践第一，推进实践基础上的理论创新。^[2]

恩格斯《自然辩证法》：“数学。辩证的辅助工具和表现形式。”^{[3]3}人们在认识现实世界（现实宇宙）的科学实践（实验）过程中，必须辅以数学的形和数，**定量**地把物质及其动态表现出来。杨振宁教授说：“除非有**定量**的实验证据，没有任何一种哲学性的讨论能够作为科学的真理来加以接受。”^[4]

爱因斯坦说：“人们不止一次地提出过这样的意见，认为自然规律未必能用微分方程来描述。事实上，从量子论的观点来看，是否容许体系有这种状态呢？为了有可能回答这个问

* 作者简介：陈 江（1964— ），男，学士，桂林市市政综合设计院总工程师。通讯地址：广西桂林市七星区朝阳路信息产业园同兴大楼北座 310 室（邮政编码 541004）； E-mail: cjguilin@qq.com

题，我们应当认为，体系运动的周期，全都只能按照量子规则形成。为了真正证明量子关系，显然需要新的数学语言。无论如何，用微分方程组和积分条件来记录自然规律，正如我们今天所做的那样，是同合理的想法矛盾的。理论物理学的基础重新受到震撼。” [5]

北京大学科学与社会研究中心孙小礼教授撰《马克思数学手稿：宝贵的历史文献》 [6]20 一文中说：“马克思对微积分有过一段生动的而又富有哲理的描述：‘人们自己相信了新发现的算法的神秘性。这种算法通过肯定是不正确的数学途径得出了正确的（尤其在**几何上**是惊人的）结果。’……从旧的传统数学看来，这种新算法，比如微分过程，正是通过不正确的数学途径得到正确的结果的。在同一个公式的推导过程中 Δx 和 dx 既作为有限的量，却又消失为零，在逻辑上显示出矛盾；有时为什么能有确定的值等等，数学家们还不能从根本上给出合理的解释。人们认为微分学是神秘的。……马克思指出：‘这里，像在别处一样，给科学撕下神秘的面纱是重要的。’……马克思认为，要从量和质的统一看待量的变化。在微分过程中，在量的否定，比如量的消失中，看到其间仍保存着特定的质的关系。马克思说，要把握微分过程的真正含义，‘唯一的困难是在逐渐消失的量之间确定一个【几何上的】比的这种辩证的见解。’”

关于逐渐消失的量，恩格斯《反杜林论》：“运动是物质的存在方式。无论何时何地，都没有也不可能有没有运动的物质。”又：“没有运动的物质和没有物质的运动是同样不可想象的。因此，运动和物质本身一样，是既不能创造也不能毁灭的；正如比较早的哲学（笛卡儿）所说的：存在于宇宙中的运动的量永远是一样的。因此，运动不能创造，只能转移。”又：“运动应当从它的反面即从静止找到它的【可求解得的数值无穷小量的】量度，这对于我们的形而上学者【康托尔及其鼓吹者希尔伯特】来说当然是一道【连续统假设 (continuum hypothesis)】难题和一付苦药。” [1]56,59

列宁《哲学笔记》：“统一物【按：即图 1-a₁，宇宙统一于物质】之分为两部分【图 1-a₃】以及对它的矛盾【图 1-a₆】着的部分【图 1-a₆ 的左侧或右侧之物质(或能量)耗散及其动态】的认识，是辩证法的实质。” [7]

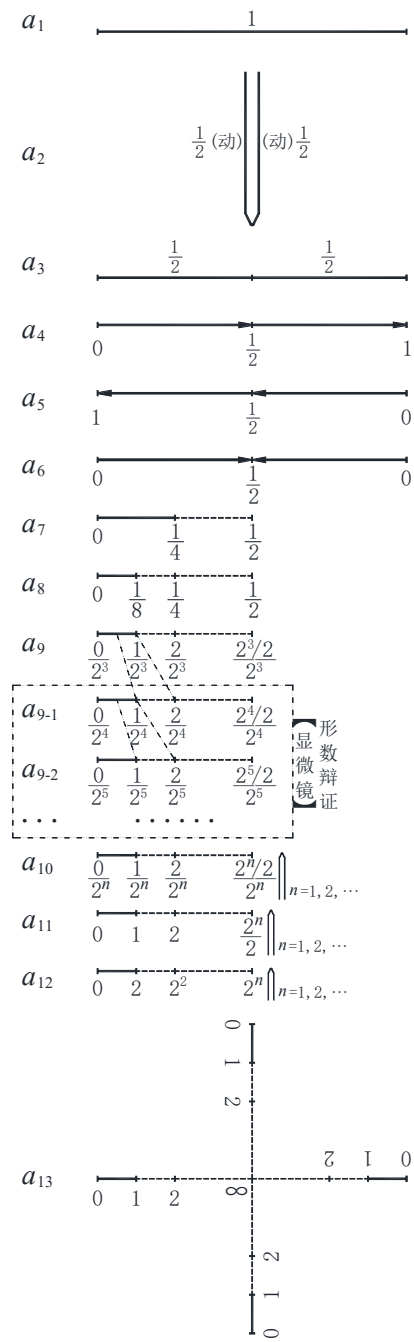


图 1 一尺之捶 日取其半 万世不竭而无为以终

事实上，设“宇宙只有一个”（图1-a₁），即设整个宇宙中的运动的量为1而分之，唯有实践直接经验的物质量杆（图1-a₁）自我量度（即“对折”）为根据的——《庄子·天下》：“一尺之捶（图1-a₆），日取其半，万世不竭”而**无为**以终（图1-a₁₂及其展开的图1-a₁₃）、终（图1-a₁₂，即图2-a₁）则有始（图2-a₂）——这种**无为而无不为**的辩证的见解，可在逐渐消失（即“转移”）的量与“不竭”的残馀者之间确定一个具有严格几何直观保证的**比：几何整数微分**（图2-a₂）^[8]。

著名物理学家卢鹤绂先生说：“二十世纪的物理学的最大成果，是量子物理学的发展。”他还说：“发现微观客体的物理量变化大都有着基本的不连续性，即某些物理量只能是其最小微量【见于图2-a₁即图1-a₁₂及其展开的图1-a₁₃中的形实者】的倍数，这就是‘量子’。”^[9]即量子是物质的最小成分。**几何整数微分**即图2-a₁中物质的几何最小微量（量子）分出（图2-a₂），其描述物质量子间的长程的吸引相互作用出现（发生）。

孙小礼教授还说：“马克思《数学手稿》一书在我国编译出版后，有两种不同的看法：一是认为马克思运用辩证法为微积分奠定了理论基础；另一相反的看法，认为马克思不懂微积分，其数学手稿没有什么学术价值。”^{[6][18]}正如毛泽东《矛盾论》指出：“在人类的认识史中，从来就有关于宇宙发展法则的两种见解，一种是形而上学的见解，一种是辩证法的见解，形成了互相对立的两种宇宙观。”恩格斯说：“不管自然科学家采取什么态度，他们还是得受哲学的支配。问题只在于：它们是愿意受某种坏的时髦的哲学的支配，还是愿意受一种建立在通晓思维的历史和成就的基础上的理论思维的支配。”^{[3][187]}

事实上，已经得到证明^[10]，在定量的物质几何学（纯数学）之辩证法宇宙观法则的见解中，**几何整数微分**（图2-a₂）是宇宙物质耗散的量子化过程之终的**浑沌态**（形、数统一或相结合的图1-a₁₂[即图2-a₁]及其展开的图1-a₁₃刻画的矢量同向相连的状态，称为物质的**几何连续统数系**）转变为**凝聚态**运动的初始条件，亦即我们人类的宇宙过程发生发展衰亡三阶段之第一阶段的初始条件或边界条件。

《庄子·秋水》曰：“消息【按：即量子消息】盈虚，终【图3-a₁（即图1-a₁₂）及其展开的图1-a₁₃】则有始【图3-a₂】，是所以语大之义，论万物之理也。”又：“物有死、生。”《知北游》解道：“生【图3-a₂】也死【图3-a₁】之徒，死【图3-a₁】也生【图3-a₂】之始【始——我们

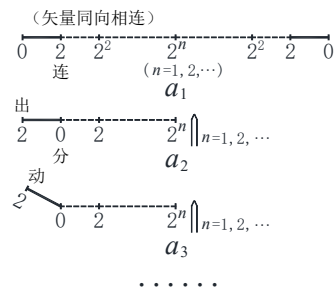


图2 局域等值变换

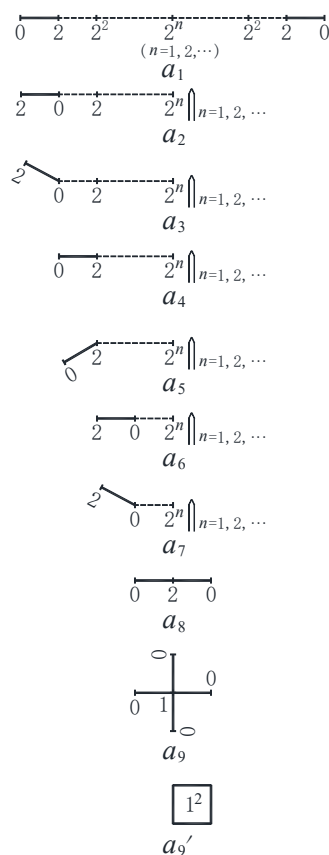


图3 量子无穷集合有完整解

人类的宇宙过程的初始条件或边界条件】，孰知其纪【孰知图 2 描述的局域等值变换】！人之生【生，指过程的发生或开始】，气之聚也【《庄子·人间世》：“气也者，虚而待物者也。唯道集虚。虚者，心斋也。”气之集聚即为量子凝聚】。聚则为生【发生】，散则为死【衰亡】。若死【图 3-a₁】，生【图 3-a₂】为徒，吾又何患【何患物质不动！不需要西方物理学中所谓的“第一推动者”，根本不存在西方物理学中所谓的“第一推动者”】！故万物一也【按：即事物普遍具有的共性和本质——数值最小(即无穷小)的几何量度(运动)，宇宙统一于物质】。”孙小礼教授说：“马克思曾作出这样的论断：‘新事物和旧事物之间的真实的从而是最简单的联系，总是在新事物自身取得完善的形式后才被发现。’”^{[6]22}

物质量杆(图 1-a₁)自我量度(即“对折”)的动态几何形式研究发现，唯有以**几何整数微分**的出现为根据，才能求得描述宇宙物质量子无穷凝聚的**几何整数无穷集合(积分)**的有限多个步骤迭合代替(简称“迭代”)有完整解(图 3)，即求解得整个宇宙内部物质凝聚态的几何直观的最小量度单位——凝聚至极的单位 1 宇宙**粒子**，用闭域的单位 1 矢量内向正交平面(点为线之界的图 3-a₉)或单位 $1^2=1$ 标量内积平面(线为面之界的图 3-a_{9'})表示或界定。在此基础上，继而构造出其“宇称自发破缺”的无限平面量度空间——“平方可和”且“可重整化”几何空间(亦可变态为一个方向破缺的二重点矢量态来解析它)。并导出宇宙标准原子内正、反对立着的物质基本粒子**群**的态构，及其对立统一的动态——宇宙亚原子内物质**基本粒子间**的“强、弱、引、电磁”这四种相互作用(即所谓“力”)依次出现之于物质**量子场**的所谓的“统一场论”。恩格斯说：“我们所面对着的整个自然界形成一个体系，即各种物体相互联系的总体，而我们在这里所说的物体，是指所有的物质存在，……这些物体是互相联系的，这就是说它们是相互作用着的，并且正是这种相互作用构成了运动。”^{[3]54}

参考文献

- [1] 恩格斯. 反杜林论(中译本)[M]. 北京: 人民出版社, 1970.
- [2] 中共中央宣传部. 习近平总书记系列重要讲话读本(2016年版)[M]. 学习出版社, 2016: 278-281.
- [3] 恩格斯. 自然辩证法(中译本)[M]. 北京: 人民出版社, 1971.
- [4] 杨振宁. 基本粒子发现简史[M]. 上海科学技术出版社, 1963:1.
- [5] 许良英等译. 爱因斯坦文集(第一卷)[M]. 北京: 商务印书馆, 1976:175-176.
- [6] 孙小礼. 马克思数学手稿: 宝贵的历史文献. 北京大学学报(哲学社会科学版), 2003(2):18-23; 中国数学会[微信号 ID: CMS-1935], [2018-5-11]. https://mp.weixin.qq.com/s/_nS1BOzpsGCYLPERTiCvrg
- [7] 列宁. 谈谈辩证法问题(中译本)[M]. 北京: 人民出版社, 1973:1.
- [8] 陈江. 物质无限可分的纯理论数学求解——依靠唯物辩证增强科学发展本领. 对称性论[微信号 ID: DAO-SSJH], (2018-5-1)[2018-5-1]. https://mp.weixin.qq.com/s/meEieUibsBKevxUZvcmj_g.
- [9] 钱维华、徐敏子. 当代物理学的发展——访著名物理学家卢鹤绂教授[N]. 文汇报, 1981-12-07(4).
- [10] 陈江. 宇宙基本原理新探——完备的量子宇宙数理信息模型的推演. 对称性论[微信号 ID: DAO-SSJH], (2017-5-31)[2017-5-31]. <https://mp.weixin.qq.com/s/Sp0cc0B40fZGxNR4RzNJMg>.

拓展阅读



<http://qr09.cn/E38qBo>

马克思数学手稿：宝贵的历史文献

孙小礼

(北京大学 科学与社会研究中心, 北京 100871)

摘要：马克思酷爱数学，几十年坚持不懈地利用闲暇时间钻研数学，留下了近千页数学手稿。马克思数学手稿(部分)在我国翻译出后，有两种不同的看法：一是过分抬高，认为马克思运用辩证法为微积分奠定了理论基础；另一相反的看法，认为马克思不懂微积分，其数学手稿没有什么学术价值。本文说明这两种看法都太极端，马克思把数学当作经济学研究的重要工具和辩证法的重要源泉，研读数学又是马克思的独特精神休养方式。马克思数学手稿是一份有特殊价值的历史文献。

关键词：马克思；数学；精神休养方式；历史文献

中图分类号：A12 **文献标识码：**A **文章编号：**1000-5919(2003)02-0018-06

千年伟人马克思

马克思(1818—1883)的伟大贡献，正像恩格斯在马克思墓前演讲中所说：达尔文发现了有机界的发展规律，马克思发现了人类历史的发展规律，揭示了经济基础和上层建筑的相互关系；在对资本主义生产方式的深入研究中，他发现了“剩余价值”，从而获得了开启社会奥秘的钥匙。[1](P574—575)马克思的《资本论》至今还在许多国家重印发行，显示出马克思主义的强大生命力。在西方著名大学中普遍设有马克思主义课程。

在20世纪与21世纪之交，在告别人类纪元第二个千年，迎接第三个千年到来之际，1999年，英国剑桥大学文理学院的教授们发起了一个评选“千年第一伟人”活动，征询、推选和投票的结果是：马克思第一，爱因斯坦第二。随后，英国广播公司(BBC)在国际互联网上进行全球投票评选第二个千年的前10名思想家，其结果为：马克思第一，爱因斯坦第二。接着，路透社又邀请各界名人再行评选时，爱因斯坦以一票之多领先于甘地和马克思。依据这一系列的评选结果，人们公认马

克思和爱因斯坦(1879—1955)应并列为千年第一伟人。

凡读过马克思的著作，特别是《资本论》的人，都为马克思的学术研究方法及其学术成就而折服。他对所研究的问题，不但拥有丰富的实际资料，而且占有大量的文献资料，在理论论述中，不但处处闪烁着深刻的思想火花，尤其渗透着那一步一步深入进去的强有力的逻辑力量。北京大学的江泽涵教授是我国著名的前辈数学家，我国拓扑学这门学科的奠基人，也是马克思《数学手稿》的最主要译者，他读了《资本论》第一卷以后，深有感慨地说：“马克思研究资本主义的方法同我们研究数学的方法是一样的，《资本论》的论证方法同我们的数学论证方法一样，都是严密地从逻辑上一步步推理和展开，真是无懈可击，令人信服。”《资本论》作为研究早期资本主义社会的经典著作，展显为一个逻辑严密的理论体系，正因为其研究方法之缜密而至今仍然得到全世界学者们的高度赞赏。

收稿日期：2002-12-28

作者简介：孙小礼(1932—)，女，浙江杭州人，北京大学与社会研究中心教授。

马克思数学手稿的具体内容

恩格斯称马克思为“科学巨匠”。他说，马克思研究的科学领域是很多的，而且对任何一个领域都不是肤浅地研究的，甚至在数学领域也有独到的发现。[1](P574—575)

马克思一生酷爱数学，从19世纪40年代起，直到逝世前不久，数十年如一日地利用闲暇时间学习和钻研数学，给我们留下了近千页数学手稿，其中有读书摘要、心得笔记和述评，以及一些研究论文的草稿。20世纪30年代以后，马克思的数学手稿和其他手稿一起，一直保存在荷兰首都阿姆斯特丹的国际社会史研究所的档案馆中。

数学研究紧密结合经济学研究

起初，马克思在与恩格斯和其他人的通信中讨论初等数学问题居多。例如，他在1864年的一封信中有关于数字计算的议论：“可以看出：不太大的计算，例如在家庭开支和商业中，从来不用数字而只用石子和其他类似的标记在算盘上进行。在这种算盘上定出几条平行线，同样几个石子或其他显著的标记在第一行表示几个，在第二行表示几十，在第三行表示几百，在第四行表示几千，余类推。这种算盘几乎整个中世纪都曾使用，直到今天中国人还在使用。至于更大一些的数学计算，则在有这种需要之前古罗马人就已有乘法表或毕达哥拉斯表，诚然，这种表还很不方便，还很繁琐。因为这种表一部分是用特殊符号，一部分是用希腊字母(后用罗马字母)编制成的。……在作很大的计算时，旧方法造成不可克服的障碍，这一点从杰出的数学家阿基米得所变的戏法中就可以看出来。”[2](P650)

1864年5月30日，恩格斯在给马克思的信中写道：“看了你那本弗朗克尔的书，我钻到算术中去了；……以初等方式来陈述诸如根、幂、级数、对数之类的东西是否方便。不管怎样好地利用数字例题来说明，我总觉得这里只限于用数字，不如用 $a + b$ 作简单的代数说明来得清楚，这是因为用一般的代数式子更为简单明了，而且这里不用一般的代数式子也是不行的。”[3](P357)

马克思关于数学的笔记和他研究政治经济学的材料有紧密的联系。在1846年的一个经济学

笔记本中，最后几页全是各种代数运算；在以后的许多笔记本中也都记有数学公式和图形，还有整页整页的算草；在为撰写《政治经济学批判大纲》准备材料的笔记本中他画了一些几何图形，记录了关于分数指数和对数的公式。1858年1月11日马克思在致恩格斯的信中说：“在制定政治经济学原理时，计算的错误大大地阻碍了我，失望之余，只好重新坐下来把代数迅速地温习一遍。算术我一向很差，不过间接地用代数方法，我很快又会计算正确的。”[4](P247)马克思曾为自己能把高等数学的某些公式用于经济学的研究而深感高兴。1868年1月8日马克思写信给恩格斯谈到工资问题的研究时，他说：“工资第一次被描写为隐藏在它后面的一种关系的不合理的表现形式，这一点通过工资的两种形式即计时工资和计件工资得到了确切的说明(在高等数学中常常可以找到这样的公式，这对我很有帮助)。”[5](P12)

看来，马克思的数学兴趣与他希望把数学运用于经济学研究有关。在1873年5月31日给恩格斯的信中谈到经济危机的研究时，他说：“为了分析危机，我不止一次地想计算出这些作为不规则曲线的升和降，并曾想用数学公式从中得出危机的主要规律(而且现在我还认为，如有足够的经过检验的材料，这是可能的)。”[6](P87)在《资本论》中我们也能看到数学的运用，据拉法格回忆，马克思曾经强调说：一门科学只有当它达到了能够成功地运用数学时，才算真正发展了。[7](P8)我理解，马克思这里所说的运用数学，不仅仅是运用数学的计算方法，而且也要运用数学的思维方法和论证方法。

对微积分的学习、思索和历史考察

19世纪60年代以后，马克思陆续阅读了一大批微积分方面的书籍，其中有布沙拉(J·L·Boucharlat)、辛德(J·Hind)、拉库阿(S·F·Lacroix)、霍尔(G·Hall)等人各自编写的微积分教科书，还有牛顿有关的数学原著等等，写下了详细的读书笔记。马克思对这些教科书进行比较，开始了自己对于微分学中一些问题的独立的思考。于1881年前后，马克思撰写了关于微分学的历史发展进程、论导函数概念、论微分以及关于泰勒定理等问题的研究草稿，而且对于这些问题都曾写过多遍草稿，

例如,关于泰勒定理留下了八份草稿。

马克思把微分学看作科学上的一种新发现、新事物,考察它是怎样产生的,产生以后遇到一些什么困难,经历了怎样的曲折发展。马克思对微积分有过一段生动的而又富有哲理的描述:“人们自己相信了新发现的算法的神秘性。这种算法通过肯定是不正确的数学途径得出了正确的(尤其在几何应用上是惊人的)结果。人们就这样把自己神秘化了,对这新发现评价更高了,使一群旧式正统派数学家更加恼怒,并且激起了敌对的叫器,这种叫器甚至在数学界以外产生了反响,而为新事物开拓道路,这是必然的。”[8](P88)

马克思把从牛顿(1642—1727)、莱布尼茨(1646—1716)创建微分学到拉格朗日(J. L. Lagrange 1736—1813)的发展,约一百多年的发展过程分为三个阶段,分别称为:“神秘的微分学”、“理性的微分学”、“纯代数的微分学”。在牛顿和莱布尼茨时期,新生的微积分很快在应用上获得了惊人的成功,但是从旧的传统数学看来,这种新算法,比如微分过程,正是通过不正确的数学途径得到正确的结果的。在同一个公式的推导过程中 Δx 和 dx 既作为有限的量,却又消失为零,在逻辑上显示出矛盾; $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 变为 $\frac{0}{0}$ (或 $\frac{dy}{dx}$)时为什么能有确定的值,等等,都不能从理论上给出合理的解释。人们认为微分学是神秘的。牛顿和莱布尼茨,以及后继者们都希望给微分学找到合乎逻辑的说明,他们为此付出了很大的努力。以达朗贝尔(J. L. R. D' Alembert, 1717—1783)为代表的“理性的微分学”和以拉格朗日为代表的“纯代数的微分学”,都是这种努力的一定阶段的成果。马克思指出:“这里,像在别处一样,给科学撕下神秘的面纱是重要的。”[8](P139)

马克思力图运用辩证法观点去分析微分学的困难。他认为“理解微分运算时的全部困难”,“正像理解否定之否定本身”一样,要把“否定”理解为发展的环节,并且要从量和质的统一看待量的变化。在微分过程中,在量的否定,比如量的消失中,看到其间仍保存着特定的质的关系,即 y 对 x 的函数关系所制约的质的关系。因此,当增量 Δx 变为零, Δy 也变为零, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 变为 $\frac{0}{0}$ ($\frac{dy}{dx}$)时能具有特

定的值,即导函数。马克思说,要把握 $\frac{0}{0}$ 的真正含义,“唯一的困难是在逐渐消失的量之间确定一个比的这种辩证的见解。”[9](P16)

马克思以比较简单的多项式函数的微分过程为例,参照比较了多种教科书,运用上述观点,选择了一种具体的推导步骤以说明这种函数的微分过程的合理性,从而说明微分学的神秘性是可以摆脱的。这样的内容,现在看来固然是很浅显的,也不足以说明一般函数的微分过程。但这也是马克思为撕下微分学的神秘面纱所做的一份历史性的努力。

马克思曾劝说恩格斯研究微积分。他在1863年7月6日给恩格斯的信中说:“有空时我研究微积分。顺便说说,我有许多关于这方面的书籍,如果你愿意研究,我准备寄给你一本。我认为这对于你的军事研究几乎是必不可缺的。况且,这个数学部门(仅就技术方面而言),例如同高等代数比起来,要容易得多。除了普通代数和三角以外,并不需要先具备什么知识,但是必须对圆锥曲线有一个一般的了解。”[2](P357)

马克思对高等数学的兴趣和钻研影响和带动了恩格斯,1865年以后,他们在通信中讨论得更多的则是微积分方面的问题了。马克思在一封给恩格斯的信的附件中说:“全部微分学本来就是求任意一条曲线上的任何一点的切线。我就想用这个例子来给你说明问题的实质。”马克思是用求抛物线 $y^2 = ax$ 上某一点 m 的切线的例子,认真画了图,向恩格斯作详细讲解的。[3](P168—169)

1881年马克思把一份“论导数概念”的手稿和一份“论微分”手稿誊抄清楚,先后寄给了恩格斯。恩格斯认真阅读了这些手稿,于1881年8月18日给马克思写了一封很长的讨论导函数的回信,信中说:“这件事引起我极大的兴趣,以致我不仅考虑了一整天,而且做梦也在考虑它:昨天晚上我梦见我把自己的领扣交给一个青年人去求微分,而他拿着领扣溜掉了。”[10](P21—23)

在马克思的影响下,恩格斯对微积分也越来越有兴趣了,他在《反杜林论》、《自然辩证法》等哲学著作中,不但大段大段地谈论微积分,精辟地分析高等数学与初等数学的区别,而且还有对于微

积分的高得不能再高的赞誉：“在一切理论成就中，未必再有什么像十七世纪下半叶微积分的发明那样看作人类精神的最高胜利了。如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩，那就正在这里。”[11](P611)

从数学中学习辩证法

马克思和恩格斯都非常明确地认为，数学是建立辩证唯物主义哲学的一个重要基础。恩格斯指出：“要确立辩证的同时又是唯物主义的自然科学观，需要具备数学和自然科学的知识。”[12](第三版序言)

在旧哲学中，黑格尔是论述数学比较多的。恩格斯曾经指出：“黑格尔的数学知识极为丰富，甚至他的任何一个学生都没有能力把他遗留下来的大量数学手稿整理出版。据我所知，对数学和哲学了解到足以胜任这一工作的唯一的人，就是马克思。”[3](P471)马克思忙于自己的研究和革命活动，并没有承担这一工作。不过，他在数学手稿中把微分学的发展同德国唯心主义哲学的发展联系起来，作了有趣的对比。当他探讨牛顿、莱布尼茨与他们的后继者的关系时，他说：“正像这样，费希特继承康德，谢林继承费希特，黑格尔继承谢林，无论费希特、谢林、黑格尔都没有研究过康德的一般基础，即唯心主义本身；否则他们就不能进一步发展康德的唯心主义。”[8](P88)

马克思把研究数学作为丰富唯物辩证法的一个源泉。他通过自己对数学的多年钻研，深有体会地认为，在高等数学中，他找到了最符合逻辑的同时又是形式最简单的辩证运动。在马克思的数学手稿中能够看到这方面的记述。

数学手稿的出版、翻译和人们的看法

马克思曾经打算把自己对数学的一些研究成果写成正式论文，但他反复改写了多遍草稿，却没有来得及写完。他生前曾嘱咐小女儿爱琳娜：“要

她和恩格斯一起处理他的全部文稿，并关心出版那些应该出版的东西，特别是第二卷（按：指《资本论》第二卷）和一些数学著作。”[13](P42)马克思逝世以后，恩格斯也曾希望把自己在自然辩证法方面的研究成果同马克思遗留下来的数学手稿一齐发表。[11](第三版序言)但是由于他肩负着整理出版马克思的最重要的著作——《资本论》第二卷、第三卷的重任，上述愿望没有能够实现。

马克思关于微分学的几篇论文草稿和一些札记于1933年译成俄文与读者见面，即在纪念马克思逝世五十周年的时候才第一次发表在苏联的理论刊物《在马克思主义旗帜下》，随后收入文集《马克思主义与自然科学》。1968年在前苏联出版了马克思数学手稿的比较完全的德俄对照本[14]，书中对各个时期的手稿写了较详细的记述。此外，对马克思的数学手稿，还陆续出版过内容和编排不一的德文本、日文本、意大利文本等等。在国际学术界引起了学者们的重视和兴趣。如日本的玉木美彦、今野武雄早就撰文介绍过马克思数学手稿的内容。1977年在西德召开的国际数学史会议上，美国学者肯尼迪(H·C·Kennedy)作了题为《马克思与微积分基础》的学术报告。美国著名数学史家斯特洛依克(D·J·Struik)1978年在《数学评论》杂志上写文章介绍了这篇报告。前几年，还有美国科学史方面的研究生在研究马克思数学手稿的传播和影响。

在我国，早从1949年起，许默夫就发表过关于马克思数学手稿的文章^①，后来有些学者从日文本或俄文本将部分内容翻译过来。1973年1月北京大学成立了马克思数学手稿编译组，依据苏联1968年出版的德俄对照本进行翻译。为了翻译准确，为了能从德文原文直接译成中文，北京大学于1974年通过外交途径从荷兰购得全部数学手稿原件的复印照片，将其中关于微积分的大部分论述和部分初等数学札记翻译成中文，编排

① 许默夫的有关马克思数学手稿的几篇文章，先后发表在《东北日报》(1949年5月5日)、《自然科学》(1951年第1卷)、《数学通报》(1958年第12期)、《新科学》(1955年第2期)等报刊上。

成书,由人民出版社于1975年正式出版。^①

两种极端的看法

马克思《数学手稿》一书于1975年在我国编译出版以后,出现了两种极端的看法。一是过分地在数学上抬高马克思,说马克思为微积分奠定了理论基础,把19世纪许多卓越数学家的重要成就都视为形而上学,惟有马克思的论述才是符合辩证法的,甚至要在教学中用马克思《数学手稿》代替微积分教材。这种作法显然是极其错误的,既违背马克思的本意,也不符合数学发展的实际,对于高等数学教学只能产生有害的影响。另一种极端的看法则认为马克思根本不懂数学,至少不懂高等数学,写于19世纪的《数学手稿》没有什么学术价值,不值得翻译出版。这种完全否定的态度也是缺乏历史分析、不符合实际的。

由于这两种看法在不同程度上一直延续到现在,所以,我感到把马克思的《数学手稿》放在当时的历史条件下,根据其具体内容,作出实事求是的恰当的评价是必要的,有现实意义的。

数学手稿:一份宝贵的历史文献

通过阅读马克思数学手稿,以及马克思的著作和通信中有关数学的论述,联系到几十年来马克思数学手稿在我国的翻译、介绍、出版和影响,我特撰写本文谈谈自己对马克思数学手稿的理解和看法,就教于对此有兴趣的朋友们,也作为对马克思逝世120周年的纪念。

读读马克思数学手稿,就感到马克思是深钻到数学中去了,确如恩格斯所说:“马克思是精通数学的。”^[12]当然,所谓“精通”,不能要求马克思通晓当时数学的全部,正好像现在堪称“精通”数学的专家也不可能对当前数学的全部内容都了如指掌一样。事实上,正如恩格斯所说:“对于自然科学,我们只能作零星的、时停时续的、片断的研

究”,而且“自然科学本身也正处在如此巨大的变革过程中,以至那些即使有全部空闲时间来从事于此的人,也很难跟踪不失”^[12]。马克思生前还没有来得及跟踪19世纪数学分析方面的重要成就,还没有阅读当时已经出版的,像哥西的《分析教程》(1821年初版)那样的一些重要著作。由于马克思还不了解微积分经过波尔察诺(B. Bolzano, 1781 - 1848)、哥西(A. L. Cauchy, 1789 - 1857)、外尔斯特拉斯(K. W. T. Weierstrass, 1815 - 1897)等数学家的努力以后所取得的逐步“完善”的形式,因而他也不可能运用极限理论做出像后来人们所理解的那样来阐明微积分的本质。

马克思不是专职数学家,也没有对数学本身做出重大建树,他的数学手稿之所以受到人们重视,首先,因为他是人类历史上的伟大思想家,而他又在数学这一园地上数十年如一日地执着地辛勤耕耘过,这一事迹是人类文化史上所罕见的,是历史上任何一位思想家都难以相比的。现在我们读到的数学手稿,就是他以自己的独特方式辛勤耕耘的历史足迹,这足迹能够保留下来,为世人所知,是令人感到宝贵的,而且值得加以研究和回味,从中获得有益的启迪。

其次,在马克思数学手稿中,确有至今还在闪光的思想和见解。比如马克思在考察了微分学的具体历史发展过程以后,曾作出这样的论断:“新事物和旧事物之间的真实的从而是最简单的联系,总是在新事物自身取得完善的形式后才被发现。”^[8](P144)这是对新旧事物关系的哲理性概括,也是对人的认识规律的哲理性概括,对人们的认识进展很有启发。

第三,在马克思主义理论中,非常注重人,尤其注重人的全面发展。马克思对自由时间或闲散时间,也就是非劳动时间的重要性有深刻的论述,他把自由时间看作财富,把休闲看作人的生活的

^① 1973年1月,当时马克思恩格斯列宁著作编译局的负责人王惠德同志把一本《马克思数学手稿》(1968年的德俄对照本,是一位瑞士记者送给他的)交给了孙小礼,建议由北京大学来组织翻译。北大欣然接受这一建议,立即成立了北京大学马克思数学手稿编译组,由邓东皋、孙小礼具体负责,动员了数学系、西语系、俄语系、哲学系的教师参加翻译工作,德文方面有江泽涵、姚保琮、冷生明、丁同仁等人,俄文方面有吴文达、黄敦、郭仲衡、鲍良骏、颜品中等人。1974年3月译出了马克思关于微积分的大部分论述,请于光远、胡世华、陆汝铃和编译局杨彦君等同志帮助校对后,于1974年5月由北京大学学报印出专刊:《马克思数学手稿(试译本)》。1974年冬购得马克思数学手稿原件的照片后,由谙悉德文的江泽涵、姚保琮两位教授仔细辨认马克思原稿手迹,同冷生明、丁同仁、邓东皋等人反复讨论推敲,对原来的译文进行核校、修改和补充。最后又请北京师范大学的张承瑞教授、蒋硕民教授对全部译稿从德文作了详细校订之后,才由人民出版社于1975年7月出版了马克思的《数学手稿》。

重要组成部分。那么,马克思自己怎样度过闲暇时间呢?据马克思的女婿拉法格回忆:“除了读诗歌和小说以外,马克思还有一种独特的精神休养方法,这就是他十分喜爱的数学。代数甚至给他以精神上的安慰;在他那惊涛骇浪的一生中有些最痛苦的时期,他总是以此自慰。”[7](P8)

马克思曾对恩格斯说:“在工作之余——当然不能老是写作——我就搞搞微分学 $\frac{dx}{dy}$ 。我没有耐心再去读别的东西。任何其他读物总是把我赶回写字台来。”[3](P124)马克思对数学的特殊爱好,使他在任何情况下都能使自己沉浸于数学之中。当马克思的夫人燕妮身患重病——肝癌的时候,他给恩格斯写信说:“写文章现在对我来说几乎是不可能了。我能用来使心灵保持必要平静的唯一的事情,就是数学。”[2](P113)他的关于微分学的研究草稿,正是在 1881 年燕妮病危的那些痛苦的日子里写作的。

在马克思的数学手稿中,能看到很多幽默俏皮的语言和生动有趣的比喻。可以想见,数学曾是马克思寻求欢乐和安慰的休闲王国,在马克思的一生中有许多时日是在这里愉快地度过的,上千页的数学手稿就是马克思这种独特的精神休养法的真实记录。

综上所述,我认为,马克思数学手稿是一份宝贵的有特殊价值的历史文献。

参 考 文 献 :

- [1] 马克思恩格斯选集:第 3 卷[M].北京:人民出版社,1971.
- [2] 马克思恩格斯全集:第 30 卷[M].北京:人民出版社,1975.
- [3] 马克思恩格斯全集:第 31 卷[M].北京:人民出版社,1972.
- [4] 马克思恩格斯全集:第 29 卷[M].北京:人民出版社,1972.
- [5] 马克思恩格斯全集:第 32 卷[M].北京:人民出版社,1971.
- [6] 马克思恩格斯全集:第 33 卷[M].北京:人民出版社,1973.
- [7] [法]拉法格.回忆马克思[M].北京:人民出版社,1954.
- [8] 马克思.数学手稿[M].北京:人民出版社,1975.
- [9] 马克思数学手稿[J].北京大学学报专刊,1974.
- [10] 马克思恩格斯全集:第 35 卷[M].北京:人民出版社,1971.
- [11] 马克思恩格斯全集:第 20 卷[M].北京:人民出版社,1971.
- [12] 恩格斯.反杜林论[M].北京:人民出版社,1971.
- [13] 马克思恩格斯全集:第 36 卷[M].北京:人民出版社,1975.
- [14] К. МАРКС МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ, ИЗДАТЕЛЬСТВО < НАУКА > ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО - МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, МОСКВА, 1968.

Karl Marx's Mathematical Manuscripts: Valuable Historical Literatures

SUN Xiao-li

(Centre for Science and Society, Peking University, Beijing 100871)

Abstract: Karl Marx had deep love for mathematics. For decades, he persisted in studying mathematics at leisure, taking nearly one thousand pages of mathematical notes, which still remained. After the publication of Marx's mathematical manuscripts (part) in China, there are two different opinions about it. One is overestimated evaluation, which declares Marx using dialectics to found the theoretical basis for calculus. The opposite opinion suggests that Marx didn't understand calculus and his mathematical manuscripts are without any academic value. In this article I just want to interpret that both of the two opinion are going to extremes. Marx thought highly of mathematics, he regarded mathematics as an important necessary tool for studying economics and an important source of dialectics. Furthermore, studying mathematics was the Marx's unique way of spending leisure and spiritual recuperation. Karl Marx's mathematical manuscripts are valuable historical literature.

Key words: Karl Marx; mathematics; way of spiritual recuperation; historical documents

(责任编辑 刘曙光)